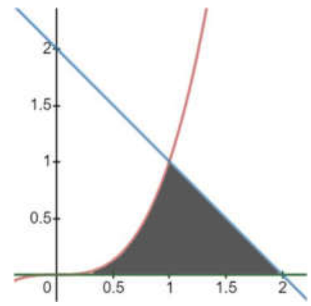
Đáp án Toán 2 HKII năm học 2020-2021

Câu I.

1. Tính diện tích A của hình phẳng bị chặn bởi các đường $y = x^3$, $y = 2 - x$ và $y = 0$.
2. Tính thể tích V của vật thể nhận được khi quay hình phẳng bị chặn bởi các đường $y = 2 - x^2$ và $y = x^2$ quanh trục Ox.
3. Tính diện tích S của phần mặt phẳng ở trong đường cong $r = 2 - \sin\theta$ và ở ngoài đường cong $r = \sin\theta$ trong tọa độ cực.

Giải.

1.



✓ Tọa độ các giao điểm (0,0), (1,1) và (0,2). Miền phẳng bị chặn bởi các đường đã cho là miền được tô màu như hình vẽ. (0.25 điểm)

✓ Tính diện tích A:

- Theo các dải ngang

$$A = \int_0^1 [(2-y) - \sqrt[3]{y}]dy \quad (0.5 \text{ điểm})$$

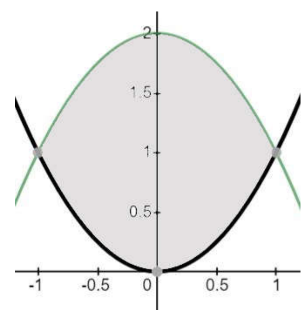
$$= \left(2y - \frac{y^2}{2} - \frac{3}{4}y^{\frac{4}{3}}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{4} \quad (0.25 \text{ điểm})$$

- Tính theo dải thẳng đứng:

$$A = \int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 (2-x)dx \ \ (0.5 \text{ điểm})$$

$$= \frac{x^4}{4}\Bigg|_0^1 + \left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{4} \quad (0.25 \text{ điểm})$$

2.



✓ Miền phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2 - x^2$ và $y = x^2$ được phác thảo như hình bên. (0.25 điểm)

✓ Thể tích V của vật thể nhận được khi quay hình phẳng trên quanh trục Ox (sử dụng phương pháp lát cắt):

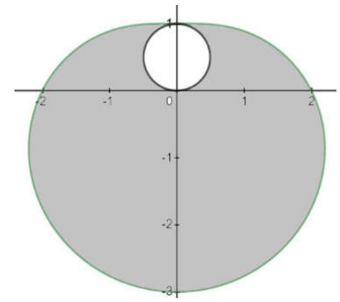
$$V = \pi\int_{-1}^1 [(2-x^2)^2 - (x^2)^2]dx \ \ (0.25 \text{ điểm})$$

$$= \pi\int_{-1}^1 [4 - 4x^2]dx = \pi\left(4x - \frac{4}{3}x^3\right)\Bigg|_{-1}^1 \ (0.25 \text{ điểm})$$

$$= \frac{16}{3}\pi \quad (0.25 \text{ điểm})$$

3.

✓ Giao điểm của hai đường cong $(1, \frac{\pi}{2})$. Miền cần tính diện tích là miền được tô màu như hình vẽ. (0.25 điểm)



✓ Tính diện tích (tính bằng phần bù diện tích):

$$S = \text{diện tích hình ngoài} - \text{diện tích hình trong (0.25 điểm)}$$

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[(2-\sin\theta)^2 - (\sin\theta)^2]d\theta \text{ (0.25 điểm)}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[4 - 4\sin\theta]d\theta = [2\theta + 2\cos\theta]|_0^{2\pi} = 4\pi \text{ (0.25 điểm)}$$

Câu II.

1. Tính $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.
2. Khảo sát sự hội tụ của tích phân $\int_1^\infty \frac{(x^2+1)\cos x dx}{x^4-x+2}$.
3. Một tin lan truyền trên facebook lúc 0 giờ, và đến 11 giờ có 120 người nhận được tin này. Số người nhận được tin này tại thời điểm t giờ là nghiệm của phương trình vi phân
$$y' = k(y+10) \text{ (k là hằng số).}$$
Hãy xác định số người nhận được tin này sau 24 giờ.

Giải.

1. Trên đoạn [0,1] hàm lấy tích phân chỉ có một điểm bất thường là $x = 1$. Ta có
$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{d(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + C \text{ (0.5 điểm).}$$
Do đó $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to1^-}(-\sqrt{1-x^2}) - \left(-\sqrt{1-0^2}\right) = 1.$ (0.5 điểm)

2. Đặt $f(x) = \frac{(x^2+1)\cos x}{x^4-x+2}$ thì f liên tục trên $[1,\infty]$. Ta có
$$0 \le |f(x)| = \frac{(x^2+1)\,|\cos x\,|}{x^4-x+2} \le \frac{x^2+1}{x^4-x+2} := g(x). \text{ (0.25 điểm)}$$
Đặt $h(x) = \frac{1}{x^2}$, ta có $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 1.$ (0.25 điểm)

Do $\int_1^\infty h(x)dx$ hội tụ (tích phân dạng $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ với $p = 2 > 1$), nên tích phân $\int_1^\infty g(x)dx$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh giới hạn. (0.25 điểm)

Vậy tích phân đã cho, $\int_1^\infty f(x)dx$, hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh. (0.25 điểm)

3.

✓ Trước hết, giải phương trình $y' = k(y+10)$.

$$y' = k(y+10) \Rightarrow \frac{(y+10)'}{(y+10)} = k \Rightarrow \ln|y+10| = kt + \ln|C|$$

hay $y = -10 + Ce^{kt}$. (0.25 điểm)

- ✓ Tin bắt đầu lan truyền lúc 0 giờ, do đó $y(0) = 0$, suy ra $C = 10$. (0.25 điểm)
- ✓ Đến 11h có 120 người nhận được tin, do đó $y(11) = 120$. Thay vào ta có

$$120 = -10 + 10e^{11k} \Leftrightarrow k = \frac{\ln 13}{11} \approx 0.2332 \text{ (0.25 điểm)}$$

- ✓ Vậy sau 24 giờ số người nhận được tin là

$$y(24) = -10 + 10e^{\frac{\ln 13}{11} \times 24} \approx 2684 \text{ (người). (0.25 điểm)}$$

Câu III.

1. Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi số sau:
   a. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{5n-4}\right)^n$
   b. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2-2n+3}{n^3-5n+6}\right)^2$
2. Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3n-2}$.

Giải. 1. a. Chuỗi có dạng $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ trong đó $a_n = \left(\frac{2n+1}{5n-4}\right)^n > 0$ với mọi $n \geq 1$. (0.25 điểm)

Do $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{5n-4}\right)^n} = \frac{2n+1}{5n-4} \to \frac{2}{5} < 1$ khi $n \to \infty$ (0.5 điểm), nên chuỗi đã cho hội tụ theo Tiêu chuẩn căn. (0.25 điểm)

b. Chuỗi có dạng $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ trong đó $a_n = \left(\frac{n^2-2n+3}{n^3-5n+6}\right)^2 > 0$ với mọi $n \geq 1$. (0.25 điểm)

Đặt $b_n = \frac{1}{n^2}$, ta có $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3-2n^2+3n}{n^3-5n+6}\right)^2 = 1^2 = 1$. (0.5 điểm)

Do chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ là p-chuỗi với $p = 2 > 1$, nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ theo Tiêu chuẩn tỷ số. (0.25 điểm)

2. Chuỗi có dạng $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ trong đó $a_n = \frac{1}{3n-2}$; $n = 1,2,\ldots$.

Do $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{3n-2}} \to 1$ khi $n \to \infty$, nên bán kính hội tụ của chuỗi này là $R = \frac{1}{1} = 1$, khoảng hội tụ là $(-1,1)$. (0.25 điểm)

Tại $x = -1$ chuỗi đã cho trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n-2}$, là một chuỗi đan dấu có dạng $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, với $a_n = \frac{1}{3n-2} > 0,\ \forall n \geq 1$. Dễ thấy dãy $\{a_n\}$ đơn điệu giảm về 0 khi $n \to \infty$, nên chuỗi này hội tụ theo Tiêu chuẩn chuỗi đan dấu. (0.25 điểm)

Tại $x = 1$ chuỗi đã cho trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ với $a_n = \frac{1}{3n-2} > 0,\ \forall n \geq 1$. Vì $a_n = \frac{1}{3n-2} \geq \frac{1}{3n},\ \forall n \geq 1$. Vì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ là chuỗi phân kỳ (chuỗi điều hòa), nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}$ cũng phân kỳ, do đó chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-2}$ phân kỳ theo Tiêu chuẩn so sánh trực tiếp. (0.25 điểm)

Vậy tập hội tụ của chuỗi đã cho là $[-1,1)$. (0.25 điểm)

Câu IV. Trong $\mathbb{R}^3$ cho các véctơ $\mathbf{u} = -m\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -5\mathbf{i} + m\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ và $\mathbf{w} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Tìm m để $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 5$.

Giải. Ta có

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -5 & m & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (3m + 8)\mathbf{i} + 19\mathbf{j} + (10 - m)\mathbf{k};\ \text{(0.5 điểm)}$$

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = -m(3m + 8) + 2 \times 19 + 3 \times (10 - m) = -3m^2 - 11m + 68.\ \text{(0.25 điểm)}$$

Do đó $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 5 \Leftrightarrow -3m^2 - 11m + 63 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{11 \pm \sqrt{877}}{6}$. Như vậy có hai giá trị m thỏa mãn điều kiện bài toán đó là $m = -\frac{11 \pm \sqrt{877}}{6}$. (0.25 điểm)